Ecuaciones diferenciales

Johann Alexander Caballero Bohórquez 2009130042

Giovanni Abril Cataño 2009130039

Javier Orlando Guzmán 2009130051

Cristian Darío Ubaque Carreño 2009130064

Memorias

Curso 6CN Matemáticas IV

Dictador por:

Lic. Lida Milena Álvarez García

Escuela Colombiana de Carreras Industriales

Facultad de Ingeniería

Coordinación Mecánica

Bogotá 2009

Índice general

Preliminares

El objetivo de estas notas es dar una introducción al tema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias a nivel elemental. Las notas están dirigidas a estudiantes de cálculo IV ecuaciones diferenciales de la Escuela Colombiana de Carreras Industriales. Al diseñar estas notas debemos tener en cuenta que en esta materia el tema se dicta en no más de 14 semanas. Es por esta razón que ciertos temas se dejan para desarrollar en los trabajos prácticos, Agradecemos la dirección y orientación de la materia a la profesora Lida Milena Álvarez García y a nuestros compañeros de grupo para la recopilación, Diego Ferney Martínez, Leandro Gil.

Ficha Técnica

Tipo de actividad: Clase magistral

Titulo de la actividad: Memorias

Fechas de realización: Lunes 24 Agosto 2009 - Lunes 23 de noviembre 2009

(Correspondiente al segundo periodo académico 2009)

Dirección: Lida Milena Álvarez García

Físico – Matemático

Lugar de realización: Aula 407 C Escuela Colombiana de Carreras Industriales

Introducción

Con el objetivo general de ofrecer una ayuda específica de los contenidos del curso de ecuaciones diferenciales como texto de apoyo y consulta para profesores y estudiantes se ha recopilado y organizado los contenidos vistos durante el segundo periodo académico 2009.

2. Generalidades Ecuaciones Diferenciales

Repaso

2.2 Derivadas

Transformación algebraica de una función para obtener otra expresión algebraica que sirve para calcular la pendiente de cualquier recta tangente a la curva de la función.

Derivadas de funciones elementales

$$f(x) = a \qquad f'(x) = 0$$
$$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$$
$$f(x) = ax \qquad f'(x) = a$$
$$f(x) = ax + b \qquad f'(x) = a$$
$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$
$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \frac{dx}{dy}$$
$$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$f(x) = a^x (a > 0) \qquad f'(x) = a^x \ln(a)$$
$$f(x) = \log_b(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x \ln(b)}$$
$$f(x) = \frac{1}{x^n} = (x^n)^{-1} = x^{-n} \qquad f'(x) = -nx^{-n-1} = -nx^{-(n+1)} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$
$$f(x) = \mathrm{sen}(x) \qquad f'(x) = \cos(x)$$
$$f(x) = \cos(x) \qquad f'(x) = -\mathrm{sen}(x)$$
$$f(x) = \tan(x) \qquad f'(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$
$$f(x) = \csc(x) \qquad f'(x) = -\csc(x)\cot(x)$$
$$f(x) = \sec(x) \qquad f'(x) = \sec(x)\tan(x)$$
$$f(x) = \cot(x) \qquad f'(x) = -\csc^2(x)$$

$$f(x) = \arcsin(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$f(x) = \arccos(x) \qquad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$f(x) = \arctan(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$f(x) = g(x) \pm h(x) \qquad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$
$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \qquad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$
$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$
$$f(x) = k \cdot g(x) \qquad f'(x) = k \cdot g'(x)$$
$$f(x) = g \circ h = g(h(x)) \qquad f'(x) = (g' \circ h) \cdot h' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

2.3 Ecuaciones Diferenciales

Una ecuación diferencial es una igualdad que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

Ej.:

- $\frac{dy}{dx} + 3y = 4\sin^2 x$

- $\frac{d^2p}{dR^2} + \frac{dz}{dR} = \frac{dQ}{dR}$

- $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2p}{dt^2} = \frac{dR}{dZ}$

2.3.1 Las ecuaciones diferenciales se pueden clasificar según:

El tipo, el orden, el grado y la linealidad o no linealidad

Según Tipo

Ordinarias: aquellas que solo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente.

No ordinarias: tiene más de una variable independiente

Según orden

El orden de una ecuación diferencial sea ordinaria o no ordinaria hace referencia a la mayor derivada presente en dicha igualdad

Según Grado

Esta dado por la potencia a la cual esta la derivada de mayor orden.

Linealidad o no linealidad

Toda ecuación diferencial se puede escribir de la siguiente forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

Para poder decir que una ecuación diferencial escrita de esta manera es lineal o no; se deben cumplir 3 condiciones.

- Todos los coeficientes deben estar en términos de la variable independiente o en su defecto ser constantes.
- Todos las derivadas y la variable dependiente deben tener grado 1
- La variable dependiente debe aparecer como función lineal.

2.3.2 ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1er ORDEN

Este tipo de ecuaciones diferenciales poseen solamente la primera derivada y se estudiarán 4 tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden tales como:

A. Variables Separables
B. Exactas
C. Usando el Factor Integrante
D. Soluciones por sustitución- Ecuaciones diferenciales Homogéneas
E. Ecuación de Bernoulli

A. Ecuaciones diferenciales de primer orden de *VARIABLES SEPARABLES*

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden es de variables separables si tienen la forma ó se pueden llevar a la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \bullet g(y)$$

Donde *f(x)* es la función que depende de la variable independiente y g*(y)* es la función que depende de la variable dependiente.

El método de solución consiste básicamente en hacer la separación de las funciones de le expresión general agrupados a cada lado de la igualdad con su respectivo diferencial.

Tenemos la formula general de la ecuación diferencial tal como:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Y lo podemos expresar en función de X y de Y:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Si separamos:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \bullet g(y)$$

Tenemos:

$$g(y)dy = f(x)dx$$

Para quitar dichas diferenciales integro a cada lado de la ecuación.

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

En la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales se obtienen soluciones generales para familias mono-paramétricas (1 constante de integración) y casi siempre de manera implícita.

Ejemplo:

$$(1+ x)dy - ydx = 0$$

$$(1+ x)\, dy = ydx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}$$

$$Ln|y| = Ln|1+x| + Ln|C|$$

$$y = e^{1+x+C}$$

$$y = e^{x+1} \cdot e^{C}$$

$$y = Ce^{x+1}$$

B. Ecuaciones diferenciales EXACTAS

Partiendo del siguiente parámetro de una diferencial exacta tenemos:

Si f(x,y) = C cte.

$$0 = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy$$

Una ecuación diferencial de primer orden, se dice que es exacta si tiene la forma o puede llevarse a la forma:

$$M(x,y)\cdot dx + N(x,y)dy = 0$$ *Forma General*

Y que dicha expresión corresponda a una diferencial exacta. Tenemos que:

La derivada de la función con respecto a X parte de *M(x,y)dx* y la derivada de la función con respecto a Y parte de *N(x,y).*

Con lo cual tenemos la siguiente condición de exactitud:

$$\frac{\partial M(x,y)}{dy} = \frac{\partial N(x,y)}{dx}$$

Criterio para determinar si una ecuación diferencial es exacta

1. Se lleva a la forma general
2. Se deriva parcialmente M con respecto a $y \to \frac{\partial M}{dy}$
3. Se deriva parcialmente N con respecto a $x \to \frac{\partial N}{dy}$
4. Si se cumple $\frac{\partial M}{dy} = \frac{\partial N}{dx}$, es exacta de lo contrario NO es exacta.

Ejemplo 1:

Determinar si la ecuación diferencial es exacta:

$x\frac{dy}{dx} - 2xe^x + y = 6x^2$ *Se lleva a la forma original*

$$x\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 2xe^x - y$$
$$xdy = (6x^2 - 2xe^x - y)dx$$
$$0 = \frac{[6x^2 + 2xe^x - y]dx}{M(x,y)} + \frac{(-xdy)}{N(x,y)}$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 + 0 - 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$
$$EXACTA$$

Ejemplo 2:

$$(x+y)(x-y)dx + x(x-2y)dy = 0$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$
$$NO \cdot es \cdot EXACTA$$

Ejemplo 3.

2xy dx + (x²-1) dy = 0

1. Verificar que es exacta
2. Identificar $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \wedge \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 1$

3. Integro cada $\frac{\partial F}{\partial x} \wedge \frac{\partial F}{\partial y}$

$$\int \frac{df}{dx} = \int 2xy$$
$$f(x,y) = \int 2xydx$$
$$f(x,y) = 2y\int xdx$$
$$f(x,y) = 2y\frac{x^2}{2} + g(y) \rightarrow \langle 1 \rangle$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial (yx^2)}{\partial y} + g'(y) = N(x,y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 \cdot (1) + g'(y) = x^2 - 1$$
$$x^2 + g'(y) = x^2 - 1$$
$$g'(y) = x^2 - 1 - x^2$$
$$g'(y) = -1$$
$$\int g'(y) = \int -1dy$$
$$g(y) = -y$$
$$\text{Re}\, emplazo \cdot en\langle 1 \rangle$$
$$f(x,y) = yx^2 - y$$

C. Usando el FACTOR INTEGRANTE

En una ecuación diferencial lineal de primer orden inexacta, usamos el factor integrante para poderla transformar en una ecuación exacta. Entonces tenemos:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{A_0}{A_1} y = \frac{g(x)}{A_1}$$

P(*x*) *f(x)*

P(*x*) y *g(x)* son continuas

Entonces deducimos la ecuación general:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

Para volver exacta a la ecuación diferencial, multiplico por el facto integrante:

$$e^{\int P(x)dx}$$

Ejemplo 1: $x\frac{dy}{dx}-4y=x^6e^x$

1. Llevamos la ecuación a la forma general
   Dividimos todo entre x para eliminar la x del primer término de la ecuación y nos queda de la forma general:

   $$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^5e^x$$

   P(x) *f(x)*

2. Determino el factor integrante

   $$e^{\int P(x)dx}=e^{-\int \frac{4}{x}dx}=e^{-4\int \frac{dx}{x}}=e^{-4Ln|x|}=x^{-4}$$

3. Multiplico la ecuación diferencial para que sea exacta

   $$x^{-4}\frac{dy}{dx}\cdot x^{-4}(4x^{-1}y)=x^{-4}(x^5e^x)$$

   $$x^{-4}\frac{dy}{dx}-4x^{-5}y=xe^x$$

   Posee la forma de la derivada de un producto

   $$\int\frac{d}{dx}[x^{-4}y]=-\int xe^x dx$$

   $$x^{-4}y=xe^x-e^x$$

   $$y=\frac{xe^x-e^x}{x^4}+Ce^{x^4}$$

D. Ecuaciones diferenciales HOMOGENEAS (Soluciones por sustitución)

Son un tipo especial de ecuaciones diferenciales solucionadas por sustitución; generalmente se utiliza una de las siguientes sustituciones:

- . *$y = u * x$*
- . *$x = v * y$*

Entonces tenemos

- . y = u * x

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u\frac{dx}{dx}$$

$$dy = x \cdot du + u \cdot dx$$

- . x = v * y

$$\frac{dx}{dy} = y \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{dy}{dy}$$

$$dx = ydv + vdy$$

Para identificar si una ecuación diferencial es homogénea es necesario llevarla a la forma:

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y)dy = 0$$

y verificar que todos y cada uno de los términos de M y N sean del mismo grado. Se identifican cuál de las sustituciones se quiere realizar; y después de realizar todas las sustituciones posibles, la ecuación diferencial que aparece será de variables separables.

Tenemos: $\left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - xy\right)dy = 0$

Utilizando: y = *ux donde u= y/x*

dy= xdv+ vdx

Sustituyendo:

$$\left(x^2 + u^2x^2\right)dx + \left(x^2 - x \cdot u \cdot x\right) \cdot \left(xdu + udx\right) = 0$$

$$x^2dx + u^2x^2dx + x^3du + ux^2dx - ux^3dx - x^2u = 0$$

$$\left[x^2 + ux^2\right]dx + \left[x^3 - ux^3\right]du = 0$$

$$\left(x^2 + ux^2\right)dx = \left(-x^3 + ux^3\right)du$$

$$\frac{x^2}{x^3}dx = \frac{-(1-u)}{(1+u)}du$$

$$\int \frac{x^2}{x^3}dx = \int \frac{u-1}{u+1}du$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{u-1}{u+1}du$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \left(1 - \frac{2}{u+1}\right)du$$

$$Ln|x| + C = u - 2Ln|u+1|$$

$$Ln|x| + C = \frac{y}{x} - 2Ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + C$$

Ejemplo 1:

$$x = u \times y \rightarrow \frac{x}{y} = u$$

$$dx = udy + ydu$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xye^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}{y^2 + y^2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2} + 2x^2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}$$

$$\frac{dydz}{udy + ydu} = \frac{2uy \cdot ye^{(u)^2}}{y^2 + y^2e^{(u)^2} + 2u^2e^{(u)^2}}$$

$$y^2dy + y^2e^{u^2}dy + 2u^2y^2e^{u^2}dy = 2u^2y^2e^{u^2}dy + 2uy^3e^{u^2}du$$

$$y^2\left[1 + e^{u^2}\right]dy = 2y^3ue^{u^2}du$$

$$\int \frac{y}{y^3}dy = \int \frac{2ue^{u^2}du}{1 + e^{u^2}}$$

$$\int \frac{1}{y}dy = 2\int \frac{ue^{u^2}}{1 + e^{u^2}}du$$

$$donde :\rightarrow z = 1 + e^{u^2}$$

$$dz = 2ue^{u^2} \cdot du$$

$$Ln|y| = \int \frac{dz}{z}$$

$$Ln|y| = Ln|z| + C$$

$$Ln|y| = Ln\left(1 + e^{u^2}\right) + C$$

$$Ln(y) = Ln\left(1 + e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}\right) + C$$

E. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE BERNOULLI

Es aquella que tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = F(x)y^n$$

Si n=0 ó n=1 entonces es lineal. Para solucionar este tipo de ecuaciones diferenciales, se recurre a una sustitución para cambio de variable, de manera que se obtenga al final una ecuación diferencial lineal.

Para sustitución: $u = y^{1-n}$

Ejemplo: $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4 \rightarrow Condiciones \cdot iniciales \ldots y(1) = \frac{1}{2}$

Dividimos la ecuación entre x^2 y tenemos:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y = \frac{3}{x^2} y^4$$

1. Identificar n y saber cuál es la sustitución que se va a realizar.
   $n = 4$
   $u = y^{1-n}$; $u = y^{1-4}$; $u = y^{-3}$
2. Derivar con respecto a X
   $\frac{du}{dx} = -3y^{-4} \cdot \frac{dy}{dx}$
3. Despejar dy/dx de la ecuación obtenida en el paso 2 y sustituirla en la ecuación diferencial original.
   $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-3y^{-4}} \cdot \frac{du}{dx}$
   $Ecuación \cdot Original$
   $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x} y = \frac{3}{x^2} y^4$
   $Sustituimos \cdot en$
   $\frac{1}{-3y^{-4}} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{2}{x} y = \frac{3}{x^2} y^4$

. Transformar la ecuación diferencial obtenida tal que el coeficiente de la derivada sea 1.

$$\left[\frac{1}{-3y^{-4}}\cdot\frac{du}{dx}-\frac{2}{x}y=\frac{3}{x^{2}}y^{4}\right]*-3y^{-4}$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{6}{x}y^{-3}=-\frac{9}{x^{2}}$$

$$como\rightarrow u=y^{-3}$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{6}{x}\cdot u=-\frac{9}{x^{2}}\,Lineal$$

$$P(x)=\frac{6}{x}\cdots\cdots\cdots Factor\cdot Integrante:e^{\int\frac{6}{x}dx}=x^{6}$$

$$x^{6}\frac{du}{dx}+6x^{5}u=-9x^{4}$$

$$\frac{d}{dx}\left[u\cdot x^{6}\right]=-9x^{4}$$

$$\int u\cdot x^{6}=\int-9x^{4}dx$$

$$ux^{6}=-\frac{9x^{5}}{5}+C$$

$$u=-\frac{9}{5x}+\frac{C}{x^{6}}$$

$$y^{-3}=-\frac{9}{5x}+\frac{C}{x^{6}}\rightarrow Condiciones\cdot iniciales:y(1)=\frac{1}{2}$$

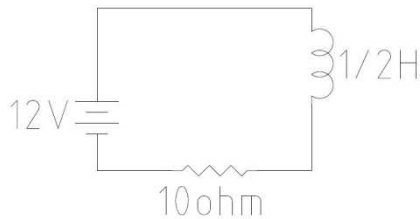
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{9}{5\cdot(1)}+\frac{C}{(1)^{6}}$$

$$8=-\frac{9}{5}+C$$

$$C=\frac{49}{5}$$

2.3.3 Aplicaciones Ecuaciones Diferenciales de primer orden

1. Una batería de 12 voltios se conecta a un circuito RL calcular la corriente que circula por el circuito si R= 10Ω L= 1/2H y considere que I(0)=0



$Et = V_L + V_R$

$Et = L\frac{di}{dt} + I \times R$

$1/2\frac{di}{dt} + 10i = 12$ factor integrante $= e^{x\int p(x)dt}$

$\frac{di}{dt} + 20i = 24$ $= e^{x\int 20t}$

$$e^{20t}\frac{di}{dt} + 20e^{20t}i = 24e^{20t}$$

$$\frac{d}{dt}[e^{20t}i] = 24e^{20t}$$

$$\int d[e^{20t}i] = \int 24e^{20t}dt$$

$$e^{20t}i = \frac{24}{20}e^{20t} + C$$

$$e^{20t}i = \frac{24}{20}e^{20t} + C$$

$$e^{20t}i = \frac{6}{5}e^{20t} + C$$

$$i = \frac{6}{5} + Ce^{-20t}$$

$$0 = \frac{6}{5} + C$$

$$C = -\frac{6}{5}$$

Respuesta $i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$

2. Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional al número de personas presentes en dicho instante.

   Si la población se duplica en 5 años, ¿Cuánto demorara en triplicarse?, ¿Cuánto demorara en cuadriplicarse?

$$\frac{dp}{dt} = KP$$

$P = 2Po \qquad t = 5años$ $\qquad (K)\ indise\ de\ crecimiento$

$P = 3Po \qquad t = ?$

$P = 4Po \qquad t = ?$

$$\frac{dp}{dt} = KP$$

$(dp)\ rapidez\ de\ crecimiento\ de\ P$

$(P)\ poblacion\ en\ un\ instante\ t$

$$\int \frac{dp}{dt} = \int K dt$$

$\ln(P) = Kt + C$

$P = e^{Kt}C \qquad P(0) = 0$

$P = Ce^{Kt}$

$P = Po\, e^{Kt}$

$2Po = Po\, e^{5K} \;\; 2Po\ cuando\ t = 5$

$2 = e^{5K}$

$\frac{\ln 2}{5} = K$

$K = 0.139$

$P = Po\, e^{0.139t}$

$3Po = Po\, e^{0.139t}$

$3 = e^{0.139t}$

$\frac{\ln 3}{0.139} = t$

$t(triplicarse) = 7.96\ años$

$t(cuadriplicarse) = 9.97\ años$

3. Para el ejercicio anterior Suponga que la población de la comunidad determinada es 10.000 Habitantes después de 3 años.

   ¿Cuál era la población inicial? ¿Cuál será la población en 10 años?

$P = Po\, e^{Kt}$

$10000 = Po\, e^{Kt}$

$Po = \frac{10000}{e^{0.139(3)}}$

$Po = 6610.009$ Solucion

$P = 6610.009\ e^{0.139(10)}$

$P = 26274.135$ Solucion

4. Un termómetro se saca de una habitación, en donde la temperatura del aire es de 70°F, al exterior, en donde la temperatura es de 10°F. Después de ½ minuto el termómetro marca 50°F. ¿Cuánto tiempo demorara el termómetro en alcanzar los 15°F?

$$K = \frac{1}{0.5}\ \ln\left(\frac{10°F - 70°F}{50°F - 70°F}\right)$$

$$K = \frac{1}{0.5}\ \ln\left(\frac{-60°F}{-20°F}\right)$$

$$K = \frac{1}{0.5}\ \ln(3)$$

$$K = 2\ \ln(3)$$

$$K = 2.1972$$

$$t = \frac{1}{K}\ \ln\left(\frac{\theta - \theta o}{\theta - \theta o}\right)$$

$$t = \frac{1}{2.1972}\ \ln\left(\frac{10°F - 70°F}{15°F - 70°F}\right)$$

$$t = 0.45512\ \ln\left(\frac{-60°F}{-55°F}\right)$$

$$t = 0.45512\ \ln 1.0909$$

$$t = 1.5460\ minutos$$

5. Un tanque contiene 200 litros de líquido en el cual se disuelven 30 gramos de sal. Una salmuera que contiene 1 gr por litro se bombea al tanque con una intensidad de 4 litros por minuto; la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera con la misma rapidez. Encuentre el número de gramos de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera.

$$e\ \ (t) = 4\ lt/min$$

$$S(t) = kg\ de\ sal\ en\ t$$

$$\frac{ds}{st} = razon\ de\ cantidad\ ganada - tasa\ de\ cantidad\ perdida$$

Conversión $1\frac{gr}{lt} \times 4\frac{lt}{min} = 4$ gr/min

$S(t) = Ve\ x\ Ce - Vs\ x\ Cs$

$Ve = velocidad\ que\ entrada\ del\ deposito$

$Ce = consentracion\ entrante$

$Vs = velocidad\ salida\ del\ deposito$

$Cs = concentracion\ saliente$

2.3.4 Ecuaciones diferenciales de orden superior

$$a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n\frac{dy}{dx} + a_o(x)y = g(x)$$

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_n(x)\frac{dy}{dx} + a_o(x)y = g(x)$$

Esta es la forma de una ecuación diferencial no homogénea con coeficientes constantes

$$a_2y'' + a_1y' + a_oy = g(x)$$

Esta es la forma de una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes.

$$a_2y'' + a_1y' + a_oy = 0$$

Esta es la forma de una ecuación diferencial homogénea con coeficientes variables.

$$x^ny^n + x^{n-1}y' + x^{n-2}y = 0$$

Ejemplo:

$y'' + 5y' = e^{-2x} \quad = \quad u' + 5u = e^{-2x}$ FI=$e^{\int 5dx} = e^{5x}$

$=e^{5x}\, u' + e^{5x}5u = e^{-2x}e^{5x}$

$= e^{5x}\, u' + 5e^{5x}u = e^{3x}$

$= \frac{d}{dx}[e^{5x}u] = e^{3x}$

$\int \frac{d}{dx}[e^{5x}u] = \int e^{3x}$

$e^{5x}u = \frac{e^{3x}}{3} + C \qquad u = \frac{e^{3x}}{3e^{5x}} + Ce^{-5x} = \frac{e^{-2x}}{3} + Ce^{-5x}$

2.3.4.1 Ecuaciones diferenciales de segundo orden homogéneas

Sean Y1, Y2,…Yn un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial homogénea de orden superior, el conjunto de las funciones:

$y_p = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$

Representa el conjunto o solución completa de la ecuación diferencial.

- Las soluciones que se obtienen de una ecuación diferencial deben ser linealmente independientes como también su combinación lineal.
- Habrá tantas soluciones para la ecuación diferencial homogénea como grado.

Construcción de una solución para la ecuación diferencial homogénea

Tenemos la E.D $y' + ay = 0$ entonces utilizaremos una ecuación auxiliar que nos facilitara la solución:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

$am^2 + bm + c = 0$ E. auxiliar

Solución Supuesta

$$y = e^{mx}$$

$$y' = me^{mx}$$

$$y'' = m^2e^{mx}$$

Tipos de solución para la ecuación auxiliar

Caso I

$$m_1 \neq m_2$$

$$y_1 = e^{mx}$$

$$y_2 = e^{m2x}$$

$$y_p = C_1e^{m_1x} + C_{12}e^{m_2x}$$

Caso II

Cuando $m_1 = m_2$

$$y_1 = e^{m_1x}$$

$$y_2 = e^{mx}\int \frac{e^{(-b/a)x}}{e^{2m_1x}}$$

$$= e^{mx}\int \frac{e^{2m_1x}}{e^{2m_1x}}$$

$$= e^{mx}\int dx$$

$y_2 = e^{mx}x$ Siempre

$y_p = C_1 e^{mx} + xC_2 e^{mx}$

$y_p = C_1 e^{m_1 x} + C_{12} e^{m_2 x}$

Formas de solución para g(x)

	$g(x)$	Forma de y_p
1.	1(una constante)	A
2.	$5x+7$	$Ax+B$
3.	$3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
4.	x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+E
5.	$sen\,4x$	$A\cos 4x + B\,sen\,4x$
6.	$\cos 4x$	$A\cos 4x + B\,sen\,4x$
7.	e^{5x}	Ae^{5x}
8.	$(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
9.	x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
10.	$e^{3x}sen\,4x$	$Ae^{3x}\cos 4x + Be^{3x}sen\,4x$
11.	$5x^2sen\,4x$	$(Ax^2+Bx+C)\cos 4x + (Ex^2+Fx+G)\,sen\,4x$
12.	$xe^{3x}\cos 4x$	$(Ax+B)e^{3x}\cos 4x + (Cx+E)e^{3x}sen\,4x$

Ecuaciones lineales: teoría básica

Un problema de valor inicial de *n*-ésimo orden consiste en resolver la Ecuación diferencial lineal:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

sujeta a las *n* condiciones iníciales*:*

$$y(x_0) = y_0\ ,\ y'(x_0) = y_1\ ,\ \cdots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Resolverlo consiste en encontrar una función y(x) indefinida en un intervalo I que contiene a x_0, donde se cumplen la ecuación y las condiciones iníciales.

Existencia de una solución única (Condición suficiente)

Sea $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, ..., $a_0(x)$, y $g(x)$ continuas en I, con $a_n(x) \neq 0$ para todo x *de* I.

Si $x = x_0$ es cualquier punto de este intervalo, entonces existe una solución $y(x)$ del problema anterior en I y es única.

Ejemplo 1

$$3y''' + 5y'' + y' + 7y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0$$

posee la solución trivial $y(x) = 0$. Como es una ED de tercer orden lineal con coeficientes constantes, $y(x) = 0$ es la única solución en cualquier intervalo que contenga a $x = 1$.

Ejemplo 2

Comprueba que $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es la única solución de

$$y'' - 4y = 12x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1$$

La ED es lineal, los coeficientes y $g(x)$ son todos funciones continuas, y $a_2(x) = 1$ es distinto de 0 en cualquier intervalo que contenga $x = 0$. La solución propuesta cumple la EDO y es única en I.

La siguiente EDO lineal de orden n:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Se dice que es **no homogénea.**

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

si $g(x) = 0$ la ecuación es **homogénea**.

Veremos que para resolver una ecuación no homogénea tendremos que resolver también la ecuación homogénea asociada.

Dependencia e independencia lineal

Un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo I, si existen ciertas constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todas nulas, tales que:

$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$

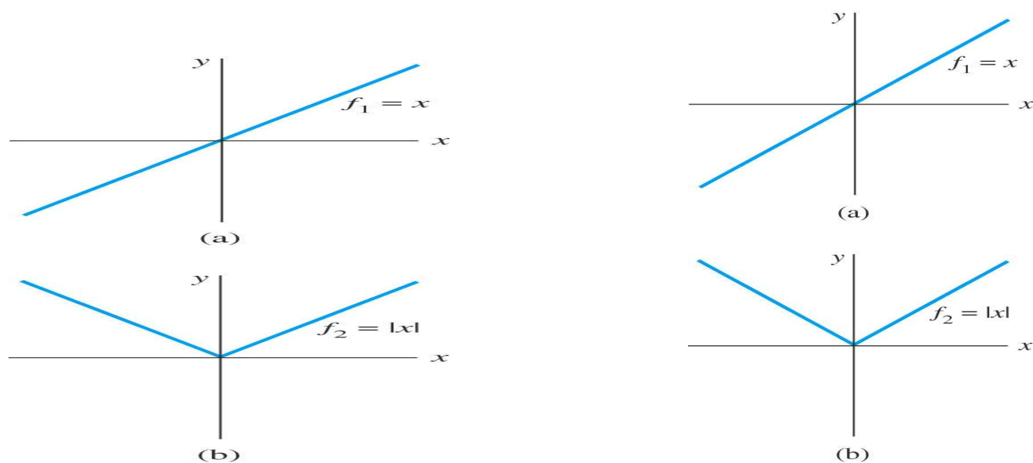
Si el conjunto no es linealmente dependiente, entonces es **linealmente independiente**.

En otras palabras, si el conjunto es linealmente independiente, cuando:

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

Entonces necesariamente $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

¿Son estas funciones linealmente independientes?



$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = 0$$

Wronskiano

Supongamos que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ posee al menos $n - 1$ derivadas. El determinante

$$W(f_1,\ldots,f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se llama el ***Wronskiano*** de las funciones.

Criterio para soluciones linealmente independientes:

Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ soluciones de una ED homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I.

Este conjunto de soluciones es linealmente independiente si y sólo si $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ para todo *x* en el intervalo.

Conjunto fundamental de soluciones:

Cualquier conjunto $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ de *n* soluciones linealmente independientes de una ED homogénea de n-ésimo orden se llama *conjunto fundamental de soluciones*.

Existencia de un conjunto fundamental

Existe un conjunto fundamental de soluciones para una ED lineal homogénea de orden n en un intervalo I.

Solución general (ecuaciones homogéneas)

Sea $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ un conjunto fundamental de soluciones de nuestra ED lineal homogénea en un intervalo I. Entonces la solución general es

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x)$$

donde c_i son constantes arbitrarias.

Las funciones $\boldsymbol{y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{-3x}}$ son soluciones de

$$y'' - 9y = 0 \text{ en } (-\infty, \infty)$$

Observa que

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Para todo *x.* Luego son independientes.

Solución General (Ecuaciones no homogéneas)

Sea y_p cualquier solución particular de una EDO no homogénea en un intervalo I. Y sea $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ un conjunto fundamental de soluciones de su EDO

homogénea asociada, entonces la solución general de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_k y_k + y_p$$

Donde las c_i , $i = 1,2,\ldots,n$ son constantes arbitrarias.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_k y_k + y_p = y_c + y_p$$

= función complementaria + una solución particular

- La función $y_p = -(11/12) - \frac{1}{2} x$ es una solución particular de

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x$$

La solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$$

Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

donde a_i son constantes, $a_n \neq 0$.

Ecuación o polinomio auxiliar:
Para $n = 2$,

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Si probamos $y(x) = e^{mx}$,

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

obtenemos la ***ecuación auxiliar.***

$$am^2 + bm + c = 0$$

Las dos raíces del polinomio auxiliar son:

$$m_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\,)/2a$$
$$m_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\,)/2a$$

(1) $b^2 - 4ac > 0$: *reales y distintas,* $m_1 \neq m_2$.
(2) $b^2 - 4ac = 0$: *reales e iguales,* $m_1 = m_2 = -b/(2a)$.
(3) $b^2 - 4ac < 0$: *complejas conjugadas,*

$$m_1 = \alpha + i\beta,\ m_2 = \alpha - i\beta$$

Caso 1: Raíces reales y distintas

La solución general es

$$\boxed{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}}$$

Caso 2: Raíces reales repetidas

$$y_1 = e^{m_1 x}$$

Para obtener la segunda solución utilizamos el método de reducción de orden, recordando que $m_1 = m_2 = -b/(2a)$.

$$y_2 = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}}\, dx = e^{m_1 x} \int dx = x e^{m_1 x}$$

La solución general es

$$\boxed{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}}$$

Caso 3: Raíces complejas conjugadas

Escribimos $m_1 = \alpha + i\beta, m_2 = \alpha - i\beta$, una solución general es

$$y = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

Usando la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x \quad e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$$
$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i\sin\beta x$$

Como

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

es solución general, tomando $C_1 = C_2 = 1$ y $C_1 = 1, C_2 = -1$, tenemos dos soluciones:

$$y_1 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

Así, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\text{sen}\,\beta x$ son un conjunto fundamental de soluciones y la solución general es

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$
$$y = e^{\alpha x}\left(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)\right)$$

Formas de solución para g(x)

	$g(x)$	Forma de y_p
1.	1(una constante)	A
2.	$5x+7$	$Ax+B$
3.	$3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
4.	x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+E
5.	$sen\,4x$	$A\cos 4x + B\,sen\,4x$
6.	$\cos 4x$	$A\cos 4x + B\,sen\,4x$
7.	e^{5x}	Ae^{5x}
8.	$(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
9.	x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
10.	$e^{3x}sen\,4x$	$Ae^{3x}\cos 4x + Be^{3x}sen\,4x$
11.	$5x^2 sen\,4x$	$(Ax^2+Bx+C)\cos 4x + (Ex^2+Fx+G)\,sen\,4x$
12.	$xe^{3x}\cos 4x$	$(Ax+B)e^{3x}\cos 4x + (Cx+E)e^{3x}sen\,4x$

2.2.1.1 Aplicaciones Ecuaciones diferenciales de segundo orden

1. *Caída de cuerpos*

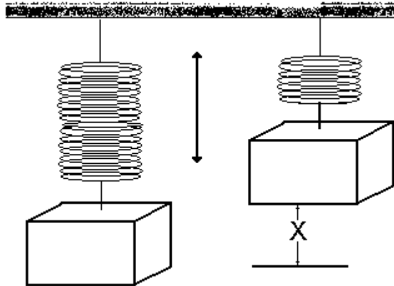
$V = \frac{dx}{dt}$ $a = \frac{dv}{dt}$ $\frac{d^2x}{dt^2} = -g$

2. *Enfriamiento de los cuerpos*

$\frac{dT}{dt} = K(T - T_0)$ To = temperatura ambiente , T(t) = T en un tiempo t,

. K= constante de proporcionalidad

3. *Oscilador armónico*

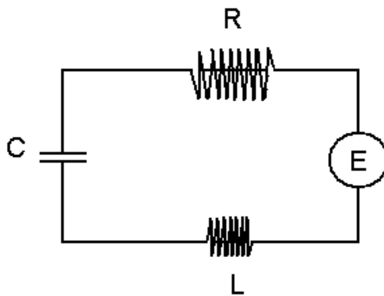


F= -K X

M g = -K X

$m.\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$ Armonico simple

4. *Circuito RLC*



$E(t) = VR + VC + VL$

$E(t) = \frac{Ld^2q}{dt} + \frac{dqR}{dt} + \frac{1}{C}q$

$VR = iR = \frac{dq}{dt}R$

$VL = L\frac{di}{dt} = \frac{Ld^2q}{dt}$

$VC = \frac{1}{c}q$

5. *Aumento de la poblacion*

$\frac{dp}{dt} = kp$ P= poblacion al momento de medir

6. Crecimiento del capital

$\frac{ds}{dt} = ks$

2.3.5 Transformaciones de laplace

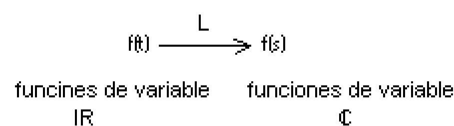
Es una transformación algebraica que se realiza mediante una integral impropia que se le aplica a una función en una variable para obtener una función en una variable diferente.

Razones, ¿para qué?

- Facilitar algoritmos
- Optimizar procesos

¿A quién?

- f(t) : df = (0,∞)no negativas.
- No deben ser funciones que crezcan más que la exponencial.
- No deben tener infinitos, máximos y mínimos.
- No sean de soporte acotado (Bausianas).
- Funciones del tiempo: señales.



Sea F una función definida para $t \geq 0$.

Entonces la integral:

$\int_0^\infty f(t)e^{st}\,dt$: transformada de Laplace

$$l[f(x)] = \int_0^\infty f(t)e^{-s}$$

Para evaluar una integral impropia se utiliza un límite al infinito y lo sustituye del límite superior por una constante B.

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(t)e^{-st}dt$$

Transformada de Laplace de una constante:

$$l[5]$$

$$l[5] = \int_0^{\infty} 2e^{-st}\,dt$$

$$l(5) = 2e^{-st}dt$$

$$l(5) = 2e^{-1}$$

$$l(k) = \frac{k}{s}$$

Transformada de Laplace de una potencia:

$$l(t) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b t.e^{-st}dt$$

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}$$

$$\lim_{b\to\infty} e^{-st}\left[-\frac{t}{s} - \frac{1}{s^2}\right]$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^{st}}\left[-\frac{t}{s} - \frac{1}{s^2}\right]$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^{sb}}\left[-\frac{b}{s} - \frac{1}{s^2}\right] - \frac{1}{e^{s0}}\left[-\frac{0}{s} - \frac{1}{s^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{1}\left[-\frac{1}{s^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{s^2}$$

$$l[t^3] = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^3 e^{-5} dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{t^3 e^{-st}}{s} - \frac{3t^2 e^{-st}}{s^2} - \frac{6te^{-st}}{s^3} - \frac{6e^{-st}}{s^4}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^{st}} \left[-\frac{t^3}{s} - \frac{3t^2}{s^2} - \frac{6t}{s^3} - \frac{6}{s^4} \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^{st}} \left[-\frac{b^3}{s} - \frac{3b^2}{s^2} - \frac{6b}{s^3} - \frac{6}{s^4} \right] - \frac{1}{e^{s0}} \left[-\frac{0^3}{s} - \frac{3.(0)^2}{s^2} - \frac{6(0)}{s^3} - \frac{6}{s^4} \right]$$

$$= -1\left(\frac{-6}{s^4}\right) = \frac{6}{s^4}$$

$$l[t] = \frac{1}{s^2}$$

$$l[t^2] = \frac{2.1}{s^3}$$

$$l[t^3] = \frac{3.2.1}{s^4}$$

$$l[t^4] = \frac{4.3.2.1}{s^5}$$

$$l[t^7] = \frac{7!}{s^8}$$

$$l[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$l[e^{2t}] = \frac{1}{s+2}$$

$$l[e^{-4t}] = \frac{1}{s+4}$$

$$l\left[e^{3/2 t}\right] = \frac{1}{s - \frac{3}{2}}$$

$$l[e^{kt}] = \frac{1}{s-k}$$

$$\boldsymbol{sen(ht) = seno\ hiperbólico\ de\ t}$$

Ecuaciones diferenciales   Memorias grupo 6CN

$senh(t) = \frac{1}{2}[e^{t} - e^{-t}]$

$cosh(t) = coseno\ hiperbólico\ de\ t.$

$cosh(t) = \frac{1}{2}[e^{t} + e^{-t}]$

$d[sen\ ht] = d\left[\frac{1}{2}(e^{t} - \ e^{-t})\right] = \frac{1}{2}[e^{t} + e^{-t}] = \cosh(t)$

$d[cos\ ht] = d\left[\frac{1}{2}(e^{t} - \ e^{-t})\right] = \frac{1}{2}[e^{t} + e^{-t}] = \text{sen}\ h(t)$

$l\{senh(kt)\} = \frac{k}{s^2 - k^2}$

$l\{cosh(kt)\} = \frac{s}{s^2 - k^2}$

$l\{senh(t)\} = l\left[\frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}\right] = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2}\int_0^t [e^{t} - e^{-t}]e^{-st}\,dt$

$\lim_{b \to \infty} \frac{1}{2}\left[\int_0^t \left[e^{-t(s-1)}dt - \int_0^b e^{-t(s+1)}dt\right]\right]$

$\lim_{b \to \infty} \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-t(s-1)}}{-(s-1)} - \frac{e^{-t(s+1)}}{-(s+1)}\right]$

- $l\{t^3.e^{2t}\} = \lim_{b \to \infty} \int_0^b t^3 2^{2t} e^{-st}$

  $\lim_{b \to \infty} \int_0^b t^3 e^{-t(s-2)}dt$

$t^3 \qquad e^{-t(c-2)}$

$3t^2 \qquad \frac{e^{-t(s-2)}}{-(s-2)}$

$6t \qquad \frac{e^{-t(s-2)}}{(s-2)^2}$

6 $\frac{e^{-t(s-2)}}{-(s-2)^3}$

0 $\frac{e^{-t(s-2)}}{(s-2)^4}$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{t(s-2)}}\left[-\frac{t^3}{(s-2)}-\frac{3t^2}{(s-2)^2}-\frac{6t}{(s-2)^3}-\frac{6}{(s-2)^4}\right]$$

$$-\left[\frac{1}{1}\left(-0-0-0-\frac{6}{(s-2)^4}\right)\right]$$

- $l\{t^3e^{2t}\}=\frac{6}{(s-2)^4}=\frac{3.2.1}{(s-2)^4}$
- $l\{t^7e^{-5t}\}=\frac{7!}{(s+5)^8}$
- $l\{t^ne^{kt-5t}\}=\frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$

$$f(t)=t.u(t)$$

Transformada de 1:

$$l\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}t\,dt$$

u=t

du=dt

v=$-\frac{1}{s}e^{-st}$

dv=$e^{-st}dt$

$$t\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)+\int\frac{1}{s}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{1}{s}e^{-st}t-\frac{1}{s}*\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}t - \frac{1}{s^2} * e^{-st}$$

$$= (0-0) - (0 - \frac{1}{s^2})$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

Transformada de 1:

$$l\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}.1dt$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$= 0 - (-\frac{1}{5})$$

$$= \frac{1}{s}$$

Transformada sen(at):

$$l\{senat\} = \int_0^{\infty} e^{-st} senatdt$$

u= senat

dv=e^{-st}

du= a.cosat.dt

$$v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}senat + \frac{a}{s}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}cosat - \frac{a}{s^2}\int e^{-st}senatdt\right]$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}senat - \frac{a}{s^2}e^{-st}cosat - \frac{a^2}{s^2}\int e^{-st}senat.dt$$

$$= \frac{-\frac{1}{s}e^{-st}senat - \frac{a}{s^2}e^{-st}cosat}{1 + \frac{a^2}{s^2}}$$

$$= \frac{(0-0) - (-\frac{a}{s^2})}{1 + \frac{a^2}{s^2}} = \frac{\frac{a}{s^2}}{\frac{s^2+a^2}{s^2}}$$

$$= \frac{a}{s^2 + a^2}$$

Propiedades de la transformada

Propiedad de linealidad

$$l\{f(t) \pm g(t)\} = l\{f(t)(\pm l)g(t)\}$$

$$l\{\infty f(t)\} = \infty l\{f(t)\}$$

$$\infty f(s)$$

$$l\left\{\frac{f(t)}{g(t)}\right\} \dots no\ hay$$

$$l\{f(t).g(t)\} \dots convolucion\ l\{f(s).g(s)\}$$

$$l\{f'(t)\} = s \neq (s) - f(0) = \int_0^\infty f(\tau)g(\tau - t)d\tau$$

$l\{f(t)dt\} = \frac{f_{(s)}}{s}$

Transformada inversa $(l^{-1}) .. transformacion\ lineal$

a. $l^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+64}\right\}$ $a^2 = 64$ $a = 8$

$\frac{1}{8} l^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+64}\right\} = \frac{1}{8} sen8t$

$\frac{a}{s^2+a}$ $senat$ $sen3t = \frac{3}{s^2+9}$

b. $l^{-1}\left\{\frac{3s-1}{s^2+4}\right\}$

$l^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+4}\right\} - l^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$

$3l^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{2} l^{-1}\left\{\frac{2}{s+4}\right\}$

$= 3cos2t - \frac{1}{2} sen2t$

c. $l^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}$

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+4)}$$

$$1 = (s+2)(s+4)A + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2)$$

Supongamos de S: 1, -2, -4.

$1 = 15A$ $A = \frac{1}{15}$

$1 = -6B$ $B = -\frac{1}{6}$

$1 = 10C$ $C = \frac{1}{10}$